OPTIMIZACIJA KARTONSKE AMBALAŽE
OPTIMIZATION OF CARDBOARD PACKAGING

Doc. dr. sc. Dominika Crnjac Milić
Elektrotehnički fakultet u Osijeku
Sveučilište J.J. Strossmayer u Osijeku
Kneza Trpimira 2B, 31000 Osijek, Hrvatska
Tel.: +385 31 224 600
Fax: +385 31 224 605
e-mail: dominika.crnjac@etfos.hr

Sažetak

Radom će se pokazati da je površina kocke manja od površine kvadra istog volumena, te da je volumen kocke veći od volumena kvadra iste površine, što je od značaja prilikom transporta robe u kartonskoj ambalaži s mogućnošću primjene i na ambalažu drugih materijala.

Motivacija za nalaženje egzaktnog matematičkog dokaza ove problematike potiče iz tvrtke Nestle, jer su uočeni ne adekvatni oblici pakiranja proizvoda za transport. Proizvodi se transportiraju u kartonskoj ambalaže, ali ne adekvatnog oblika po pitanju optimizacije troškova prijevoza. Dokaz u ovom radu ukazuje na potrebu promjene ambalaže u oblik kocke prilikom transporta proizvoda.

Ključne riječi: volumen, površina, kocka, kvadar, transport

Abstract

The paper will show that the area of a cube is less than the area of a parallelepiped of the same volume, and that the volume of the cube is greater than the volume of the parallelepiped of the same area, what is of major importance for the transportation of goods in cardboard packaging with the possibility of application to other packaging materials.

Motivation for finding an exact mathematical proof for this problem originates from the Nestle company, since inadequate forms of product packaging for transport purposes have been noticed. Products are transported in cardboard packagings, but in inadequate forms with respect to optimization of transportation costs. The proof in this paper emphasizes the need for changing the form of packaging into a cubic one for the purpose of product transportation.

Key words: volume, area, cube, parallelepiped, transportation

1. UVOD

S ekonomskog stajališta važno je neprestano proučavati kako smanjiti troškove pri izradi ambalaže. Oblik ambalaže utječe na cijenu proizvoda, jer se pri transportu velikih količina proizvoda u ne adekvatnim pakiranjima stvaraju gubitci.[115] Osnovni zadatak logistike je sa što više količina proizvoda obaviti što jeftiniji posao transporta.

Jedan od glavnih čimbenika je način i oblik pakiranja, pri čemu se želi ostvariti optimalni utrošak materijala.

2. POVRŠINA KOCKE JE MANJA OD POVRŠINE KVADRA ISTOG VOLUMENA

U svrhu rješenja pretpostavimo da je oznaka istog volumena v. Tada se za bridove kvadra koji se dodiruju u jednom njegovom vrhu mogu uzeti brojevi $a=\frac{\sqrt[3]{v}}{x}$, $b=\frac{\sqrt[3]{v}}{y}$ i $c=xy\sqrt[3]{v}$, jer je tada volumen kvadra $V=abc=\frac{\sqrt[3]{v}}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{v}}{y}\cdot xy\sqrt[3]{v}=v.$[116]

S druge strane, površina promatranog kvadra je

$$P=2(ab+ac+bc)=2\left(\frac{\sqrt[3]{v}}{x}\cdot\frac{\sqrt[3]{v}}{y}+\frac{\sqrt[3]{v}}{x}\cdot xy\sqrt[3]{v}+\frac{\sqrt[3]{v}}{y}\cdot xy\sqrt[3]{v}\right)=2\sqrt[3]{v^2}\left(\frac{1}{xy}+y+x\right).$$

P ima minimalnu vrijednost kad je $x=y=1$.

U svrhu dokaza tvrdnje pokazat ćemo da je nemoguća relacija $x+y+\frac{1}{xy}\leq 3$, uz uvjete $x>0,\ y>0,\ x\neq 1,\ y\neq 1.$

Pokažimo da je uz prethodne uvjete $xy+\frac{1}{xy}\geq 2.$

Zaista, kad bi bilo $xy+\frac{1}{xy}<2$, imali bi $(xy)^2-2xy+1<0$ ili $(xy-1)^2<0$ što je kontradiktorno.

---

[115] Ramsey F., (1928): „A Mathematical Theory of Saving“, *Economic Journal*, Vol. 38, No 152, pp. 543- 552

[116] Pavković B., Veljan D. (2003): Elementarna matematika *I*, Školska knjiga, Zagreb

Dakle, jednadžba $xy+\frac{1}{xy}=2$ je zadovoljena za $xy=1$, što implicira $y=\frac{1}{x}$.

Zamjenom $y=\frac{1}{x}$ u $P=2\sqrt[3]{v^2}\left(\frac{1}{xy}+y+x\right)$, dobivamo $x+\frac{1}{x}+1\le 3$, odnosno $x^2-2x+1\le 0$, tj. $\left(x-1\right)^2\le 0$, što je moguće samo u slučaju da je $x=1$, što je u suprotnosti s pretpostavkom $x+y+\frac{1}{xy}\le 3.$

Iz prethodnog zaključujemo da je $x+\frac{1}{x}>2$, pa je $xy+\frac{1}{xy}>2$ ili $-xy-\frac{1}{xy}<-2.$

Iz relacija $\left(\frac{1}{xy}+y+x\right)\le 3$ i $x+\frac{1}{x}>2$, zbrajanjem dolazimo do nejednadžbe $x+y<xy+1$, tj. $x-1<y\left(x-1\right)$, što daje:

a) ako je $x>1$, tada je $y>1$
b) ako je $x<1$, tada je $y<1$.

U oba slučaja relacija $x+y+\frac{1}{xy}\le 3$ je nemoguća.[117]

a) Ako je $x>1,\ x=1+k$ i $y>1,\ y=1+t,$ pri čemu su k i t pozitivni brojevi, tada je uz uvjet $x>0$, $y>0,\ x\ne 1,\ y\ne 1$, $\left(1+k\right)+\left(1+t\right)+\frac{1}{\left(1+k\right)\left(1+t\right)}\le 3$, pa slijedi

$k+t+\frac{1}{\left(1+k\right)\left(1+t\right)}\le 3-2$, te $k+t+\frac{1}{1+k+t+kt}\le 1$, što daje

$k+k^2+kt+k^2t+1+tk+t^2+kt^2+1\le 1+k+t+kt$, te $k^2+t^2+k^2t+kt^2+kt\le 0$, što je kontradikcija jer su po pretpostavci k i t pozitivni brojevi.

b) Ako je $x<1$ i $y<1$, tada je $xy<1$, tj. $\frac{1}{x}>y.$

Množeći prethodnu jednadžbu sa $\frac{1}{y}-1$, dobivamo $\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}>1-y.$

[117] Chang, Alpha C. (1994): *Osnovne metode matematičke ekonomije*, Mate, Zagreb.

Zamjetimo da je $\frac{1}{y}-1$ pozitivan broj, jer je $y<1$, odnosno $\frac{1}{y}>1$. Budući da je $x+\frac{1}{x}>2,$ zbrajanjem nejednadžbi $\frac{1}{xy}-\frac{1}{x}>1-y$ i $1+\frac{1}{x}>2$, dobivamo $\frac{1}{xy}+x>3-y$, odnosno $x+y+\frac{1}{xy}>3$, što je nemoguće pod uvjetima $x\neq 1$ i $y\neq 1.$

Nadalje, jedan od brojeva x ili y jednak je jedinici. U slučaju da je $x=1$ imamo dva slučaja: 1) $y+\frac{1}{y}<2$ ili 2) $y+\frac{1}{y}=2$.

Nejednadžba $y+\frac{1}{y}<2$ je nemoguća, jer je po pretpostavci $y\neq 1,$ a jednadžba $y+\frac{1}{y}=2$ je zadovoljena samo u slučaju kad je $y=1$:

$y^2-2y+1=0;\ (y-1)^2=0\Rightarrow y=1$.

Iz prethodnog zaključujemo da izraz $x+y+\frac{1}{xy}$ nije nikad manji od 3, već je jednak 3 i to u slučaju kad je $x=y=1.$

Dakle, površina kvadra $P=2\sqrt[3]{v^2}\left(x+y+\frac{1}{xy}\right)$ postaje najmanja kad su mu bridovi $a=b=c=\sqrt[3]{v^2}$, tj. kad je kocka.

3. VOLUMEN KOCKE JE VEĆI OD VOLUMENA KVADRA ISTE POVRŠINE

Neka i dalje volumen označavamo kao v, a bridove $a=\frac{\sqrt[3]{v}}{x},\ b=\frac{\sqrt[3]{v}}{y},\ c=xy\sqrt[3]{v}$, tada je površina kvadra $P=2\sqrt[3]{v^2}\left(x+y+\frac{1}{xy}\right)$, što daje $2\sqrt[3]{v^2}=\frac{P}{x+y+\frac{1}{xy}}$.

Zamjetimo da $2\sqrt[3]{v^2}$, a time i v ima najveću vrijednost kad izraz $x+y+\frac{1}{xy}$ ima minimalnu vrijednost.

Prethodno narečeno je već dokazano i vrijedi u slučaju kad je $x = y = 1$, tj. kad je $a = b = c$.
Dakle, u pitanju je kvadar sa jednakim bridovima, tj. kocka.

4. ZAKLJUČAK

Znajući da su transportni troškovi značajan čimbenik u cijeni proizvoda, od važnosti je oblik pakovanja.

Ovim radom je pokazano da je najpovoljniji oblik pakovanja u obliku kocke kako s gledišta volumena transporta, tako i s gledišta uloženog materijala u ambalažu. Motivacija je potekla iz tvrtke Nestle Adriatic d.o.o., jer su uočeni razni oblici pakovanja, a nedostajao je egzaktan matematički dokaz koji bi vodio promjeni i optimizaciji sredstava za transport proizvoda.

LITERATURA

Besenko, D.; Drenove, D.; Schanley, M. (1996): *Economic of Strategy*, Wiley&Sons, New York.

Chang, Alpha C. (1994): *Osnovne metode matematičke ekonomije*, Mate, Zagreb

Day, G.S. (1984): *Strategic Market Planing: The Pursuit of Competitive Advantage*, West Publishing Company, St. Paul.

Muller, J.; Singh, J., red. (2006): *Category management*, Internacionalni centar za profesionalnu edukaciju, Zagreb.

Marshall A. (1890): *Principles of Economics*, MacMilan and Co, London.

Pavković B.; Veljan D. (2003): Elementarna matematika *I*, Školska knjiga, Zagreb.

Pavković B.; Veljan D. (1995): Elementarna matematika II, Školska knjiga, Zagreb.

Ramsey F. (1928): „A Mathematical Theory of Saving“, *Economic Journal*, Vol. 38, No 152, pp. 543- 552.