STABLO (DRVO) LOGIČKIH MOGUĆNOSTI I NJEGOVA PRIMJENA U LOGISTICI

TREE OF LOGICAL POSSIBILITIES AND ITS APPLICATION IN LOGISTIC

Doc. dr. sc. Dominika Crnjac Milić
University of Osijek, Faculty of Electrical Engineering,
Kneza Trpimira 2b, HR – 31000 Osijek, Croatia
e-mail: dominika.crnjac@etfos.hr

Sažetak

Znajući da do danas nije poznat efikasni algoritam za rješavanje problema trgovačkog putnika cilj nam je dati izvjesni doprinos u tom pravcu. Što više dat ćemo i neke rezultate u određivanju najkraćeg puta i skladištenja.

Ključne riječi: čvor, put, drvo, stablo, ciklus, Kartezijev graf.

Abstract

Knowing that until today has not been known effective algorithm for solving the traveling salesman problem we aim to give a certain contribution in this direction. The more we give some results in determining the shortest time and storage

Key words: node, path, tree, cycle, Cartesian graph.

1. UVOD

Mnoge pojave se mogu modelirati grafovima koji se sastoje od točaka i njihovih spojnica: Na primjer, točke (ili vrhovi) mogu predstavljati komunikacijske centre, a spojnice (ili bridovi) komunikacijske veze itd. Vrlo interesantan prirodni primjer je logičko ili hijerarhijsko nizanje, kao u slučaju dijagrama tako algoritma pri čemu su instrukcije vrhovi, a logički tokovi iz jedne instrukcije u moguće naredne instrukcije definiraju bridove. Primjeri za prethodno su kompjutorska struktura podataka, mreža paralelnih računala, evulicijska stabla živih bića, distribucija poslova u velikim ekonomskim projektima itd. Dakle, spajanjem točaka (vrhova) spojnicama (bridovima) dobijemo **graf**.

U grafu svaka dužina povezuje dvije točke, a svaka točka je sjecište dužina, ako nema zatvorenih ciklusa sastavljenih od tih točaka i dužina, graf nazivamo **drvo** ili **stablo**.

Preciznije rečeno; **Graf** G je uređena trojka $G=\left(V\left(G\right),E\left(G\right),\psi_G\right)$, koja se sastoji od nepraznog skupa $V=V\left(G\right)$ čiji su elementi vrhovi od G, skupa $E=E\left(G\right)$ disjunknog sa $V\left(G\right)$, čiji su elementi bridovi od G i funkcije incidencije ψ_G, koja svakom bridu od G pridružuje neuređeni par (ne nužno različitih) vrhova od G.

2. PROBLEM NAJKRAĆEG PUTA

Dakle, potrebito je pronaći put najmanje težine koji spaja dva zadana vrha u_0 i v_0.
U svrhu jednostavnosti umjesto težine puta p uvedimo pojam **duljina puta** p, pri čemu je $p = \sum_{e \in p} w(e)$, a najmanja težina (u,v)- puta neka je **udaljenost** od w do v što pišemo $d(u,v)$.

U svrhu nalaženja najkraćeg puta dajemo sljedeći Algoritam koji nalazi najkraći (u_0, v_0)-put, šta više, sve najkraće putove od u_0 do svih drugih vrhova u G.

Neka je $S \subseteq V$, tako da je $w_0 \in S$, $\overline{S} = V \setminus S$. Ako je $p = w_0 ... \overline{wv}$ najkraći put od u_0 do $\overline{S}$, tada je $\overline{u} \in S$ i $(u_0, \overline{u})$- dio od p mora biti najkraći $(u_0, \overline{u})$- put.
Otuda je $d(u_0, \overline{v}) = d(u_0, \overline{u}) + w(\overline{uv})$, udaljenost od u_0 do $\overline{S}$ je

$$d(u_0, \overline{S}) = \min_{u \in S, v \in \overline{S}} \{d(u_0, u) + w(uv)\} \qquad (1)$$

Krenimo od skupa $S_0 = \{u_0\}$ i konstruirajmo rastući niz podskupova od $V, S_0, S_1, ..., S_{v-1}$, tako da su na kraju i- tog koraka poznati najkraći putovi od u_0 do svih vrhova iz S_i. Prvi je korak da se nađe vrh najbliži vrhu u_0 što postižemo izračunavajući $d(u_0, \overline{S}_0)$ i birajući vrh $u_1 \in \overline{S}_0$ tako da je $d(u_0, u_1) = d(u_0, \overline{S}_0)$, pa iz (1) slijedi

$$d(u_0, \overline{S}_0) = \min_{u \in S_0, v \in \overline{S}_0} \{d(u_0, u) + w(uv) = \min_{v \in \overline{S}_0} \{w(u_0 v)\}.$$

Nadalje, stavimo $S_1 = \{u_0, u_1\}$, p_1- put $u_0 v_1$, pa je to najkraći (u_0, u_1)- put.
U svrhu općenitosti stavimo $S_k = \{u_0, u_1, ..., u_k\}$ i neka su najkraći (u_0, u_k)- putovi $p_1, ..., p_k$ već određeni, tada sa (1) izračunavamo $d(u_0, \overline{S}_k)$ i odaberemo vrh $u_{k+1} \in \overline{S}_k$ takav da je $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, \overline{S}_k)$. Uočimo da je prema (1) $d(u_0, u_{k+1}) = d(u_0, u_j) + w(u_j u_{k+1})$ za neko $j \leq k$, pa dobivamo najkraći (u_0, u_{k+1})- put dodavanjem brida u_j, u_{k+1} putu p_j.

Zamijetimo da u svakom koraku ovi najkraći putovi zajedno čine povezani graf bez ciklusa. Ovakve grafove nazivamo stablo (drvo) i prethodni algoritam nazivamo proces rasta stabla.

3. PROBLEM TRGOVAČKOG PUTNIKA

Zadaća trgovačkog putnika je posjetiti neke poslovne destinacije i vratiti se nakon obavljenog posla. Ako je zadano vrijeme putovanja među pojedinim destinacijama tako da svaku destinaciju posjeti točno jednom, postavlja se pitanje kako napraviti plan putovanja da putuje što kraće?

Prema prethodnom (problem najkraćeg puta) treba naći u potpunom težinskom grafu Hamiltonov ciklus[393] najmanje težine, kojeg nazivamo **optimalni ciklus**. Napomenimo da do danas nije poznat efikasni algoritam za rješavanje problema trgovačkog putnika.

Želja nam je naći metodu za neko "dobro" rješenje koje naravno nije optimalno.
Ovdje ćemo dati jedan "aproksimativan" pristup, a sastoji se u tome da se nađe neki Hamiltonov ciklus, pa da se zatim traži drugi manje težine koji je malo modificiran.

Ako je $c = v_1 v_2 \dots v_V v_1$, tada za sve $i, j, 1 < i+1 < j$ možemo naći novi Hamiltonov ciklus $c_{ij} = v_1 v_2 \dots v_i v_j v_{j-1} \dots v_{i+1} v_{j+1} v_{j+2} \dots v_V v_1$, gdje smo odstranili bridove $v_i v_{i+1}, v_j v_{j+1}$, a dodali bridove $v_i v_j$ i $v_{i+1} v_{j+1}$.

Nadalje, ako za neki i, j vrijedi $w(v_i v_j) + w(v_{i+1} v_{j+1}) < w(v_i v_{i+1}) + w(v_j v_{j+1})$ tada je ciklus c_{ij} poboljšanje od c. Nastavljajući ovim putem doći ćemo do ciklusa koji se više ne može poboljšati ovom metodom. Jasno, da konačni ciklus nije optimalan. U svrhu postizanja veće točnosti, proceduru možemo ponoviti više puta, počinjući s različitim ciklusima.

4. PROBLEM SKLADIŠTENJA

Poslovni subjekt proizvodi n proizvoda $P_1, P_2, \dots, P_n$. Ako neki proizvodi pri dodiru prouzrokuju uništenje nužno je poduzeti neke mjere opreza. Nužno je graditi skladište u vidu odjeljaka i staviti inkompatibilne proizvode u različite odjeljke da ne bi došli u mogućnost dodira. Nameće se pitanje; koji je najmanji broj odjeljaka potrebit?

Konstruirajmo graf G s vrhovima $v_1, \dots, v_n$, tako da su dva vrha v_i, v_j ako i samo ako su proizvodi P_1, P_2 inkompatibilni. Zamijetimo da je najmanji broj odjeljaka u koje je potrebito podijeliti skladište upravo kromatski[394] broj $k(G)$.

Napomenimo da do danas nije nađen zadovoljavajući algoritam za nalaženje kromatskog broja iako je za praktične probleme to veoma važno.

5. STABLO (DRVO)[395] LOGIČKIH MOGUĆNOSTI I NJEGOVA PRIMJENA

Kartezijev produkt[396] konačnog broja skupova

$$\mathrm{X}_1 x \mathrm{X}_2 x \dots x \mathrm{X}_k = \{(x_1, x_2, \dots, x_k) \mid x_1 \in \mathrm{X}_1, x_2 \in \mathrm{X}_2, \dots, x_k \in \mathrm{X}_k\}$$

[393] D. Veljan, Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb, 1989 str, 288.
William R. Hamilton (1805-1865), irski matematičar
[394] D. Veljan, Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb, 1989 str, 304.
[395] Dražen Barković, Operacijsko istraživanje u investicijskom odlučivanju, Ekonomski fakultet, Osijek, 2004, str. 157.
[396] Alpha C. Chaing, Osnovne metode matematičke ekonomije, Mate, Zagreb, 1994, str. 19.

ima veliku primjenu u rješavanju praktičnih problema.

Opće je poznato da primjenom Kartezijevog produkta dobijemo skup uređenih k - torki u kojima elementi respektivno pripadaju svakom od faktora Kartezijevog produkta. Broj uređenih k - torki Kartezijevog produkta jednak je produktu brojeva koji predstavljaju broj načina izbora elemenata svakog od faktora Kartezijevog produkta.

Jedan od načina grafičkog predstavljanja Kartezijevog produkta je preko stabla (drveta) logičkih mogućnosti, što pokazuje sljedeći primjer.

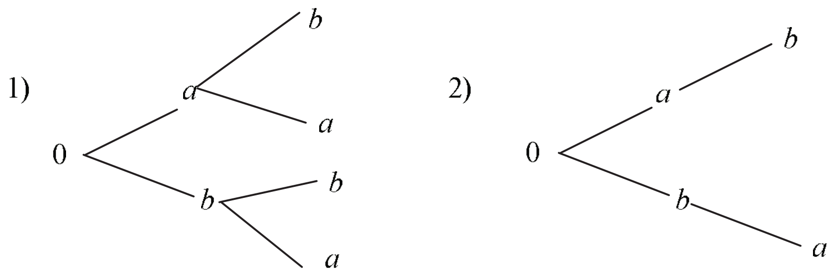
Primjer 1

Na koliko različitih načina slova a i b se mogu napisati tako da se:

1) slova mogu ponoviti
2) nijedno slove ne ponovi.

Zamijetimo da su za slučaj 1) u pitanju parovi (a,a), (a,b), (b,a), (b,b), a u slučaju 2) parovi (a,b) i (b,a).

Ovaj problem možemo promatrati preko drveta (stabla) logičkih mogućnosti.
Krenimo od ishodišta 0 uvažavajući orijentaciju s lijeva na desno i nacrtajmo dvije grane. Svaka grana predstavlja izbor našeg prvog slova. Nakon ovog izbora nacrtajmo druge grane za drugi izbor. Zamijetimo da druge grane predstavljaju izbor drugog slova, vidi sl. 1.



Sl. 1

Nazovimo elemente faktora Kartezijevog produkta čvorovima drveta logičkih mogućnosti, uvažavajući ishodište 0 kao početni čvor. Svi čvorovi nakon prvih grana određuju prvu kolonu čvorova (elementi a,b), nakon drugih grana drugu kolonu čvorova itd. s tim što ćemo uvažiti da se ishodište nalazi u nultoj koloni i njega nećemo posebno označavati.

U zavisnosti od uvjeta zadaće prva kolona čvorova predstavlja izbor elementa prvog faktora Kartezijevog produkta, druga kolona čvorova izbor elementa drugog faktora itd., k - ta kolona čvorova predstavlja izbor elemenata k -tog faktora Kartezijevog produkta. Skup koji se sastoji od konačnog broja k nanizanih grana od ishodišta do zadnjeg čvora nazivamo putanjom (0ab).
Čvorovi na jednoj putanji predstavljaju uređenu k - točku elemenata Kartezijevog produkta. Broj krajnjih čvorova predstavlja broj elemenata Kartezijevog produkta od k skupova.

Iz prethodnog možemo zaključiti da je drvo (stablo) logičkih mogućnosti skup dopustivih elemenata Kartezijevog produkta dva ili više skupova predstavljenog grafički.

Jednostavnije rečeno, drvo (stablo) logičkih mogućnosti je shema koja se upotrebljava za numeriranje svih logičkih mogućnosti tijeka događaja, pri čemu se svaki od njih može odigrati na konačan broj načina.

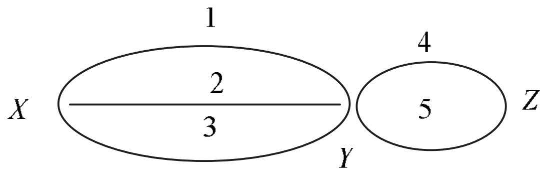
Navedimo jedan zanimljiv transportni problem.

Primjer 2

Između mjesta X i Y prometuju tri autobusne linije 1, 2, 3, a između mjesta Y i Z dvije autobusne linije 4 i 5.

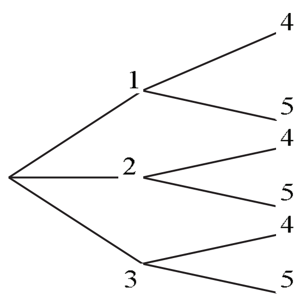
1) Na koliko načina putnik može putovati od mjesta X do mjesta Z preko mjesta Y?
2) Na koliko načina putnik može kružno putovati od mjesta A do mjesta Z preko mjesta Y?
3) Na koliko načina putnik može kružno putovati od mjesta A do mjesta Z preko mjesta B ako može koristiti jednu autobusnu liniju samo jednom?

U svrhu rješenja promatrajmo skupove $I=\{1,2,3\}$ i $J=\{4,5\}$.



Sl. 2

1) Putnik se u prvom koraku opredjeljuje da započne putovanje jednom od autobusnih linija; 1, 2 ili 3. Jasno da je ovom pretpostavkom određen izbor prvih grana ili izbor elemenata (čvorova) prvog faktora Kartezijevog produkta $I \times J$. Kada je stigao u mjesto Y, putnik bira jednu od dvije autobusne linije, 4 ili 5 da bi stigao do mjesta Z. Ovim uvjetom određen je izbor elementa drugog faktora J Kartezijevog produkta skupova $I \times J$, ili izbor čvora druge kolone sl. 2.



Sl. 3

Budući da broj krajnjih čvorova iznosi 6, broj mogućih načina na koje putnik može putovati od X do Z preko mjesta Y je $3 \cdot 2 = 6$. Ako slova koja označavaju mjesta spojimo vektorima možemo prikazati na drugi način putanju $X \xrightarrow{3} Y \xrightarrow{2} Z$ pri čemu broj iznad strelica označava broj načina izbora elemenata faktora Kartezijevog produkta.

2) Prema uvjetima zadatka putnik može putovati od mjesta X preko mjesta Y do mjesta Z i od mjesta Z preko mjesta Y do mjesta X. Prikaz puteva je $X \xrightarrow{3} Y \xrightarrow{2} Z \xrightarrow{2} Y \xrightarrow{3} X$, pa Kartezijev produkt skupova $I \times J \times J \times I$ možemo prikazati drvetom logičkih mogućnosti. Budući da je broj krajnjih čvorova $3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 = 36$ to je izbor mogućih načina na koje putnik može putovati jednak 36.

3) Kako prema uvjetu zadatka putnik može koristiti jednu autobusnu liniju samo jednom pa ćemo u prethodnom slučaju zanemariti one putanje na kojim su dva identična čvora, što možemo jednostavno prikazati drvetom logičkih mogućnosti. Izbor putanje je $X \xrightarrow{3} Y \xrightarrow{2} Z \xrightarrow{1} Y \xrightarrow{2} X$ odnosno $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 12$ načina.

6. ZAKLJUČAK

Koristeći teoriju drvo (stablo) logičkih mogućnosti dali smo neke nove rezultate u rješavanju problema trgovačkog putnika, najkraćeg puta i skladištenja. Osim toga pokazan je put novom istraživanju koristeći teoriju grafova kao vrlo dobar alat za rješavanje ekonomskih problema optimizacije.

LITERATURA

Dražen Barković: Operacijska istraživanja u investicijskom odlučivanju, Ekonomski fakultet, Osijek, 2004.

Darko Veljan: Kombinatorika s teorijom grafova, Školska knjiga, Zagreb, 1989.

Walter Feibes: Introduction to Finite Mathematics, Canada, 1974.

Seymour Lipschutz: Theory and problems of Finite Mathematics, New York, 1966.