PROBABILISTIČKI PRISTUP SUSTAVU MASOVNOG USLUŽIVANJA

A PROBABILISTIC APPROACH TO MASS SERVING SYSTEM

Doc. dr. sc. Dominika Crnjac Milić
Sveučilište J.J. Strossmayera u Osijeku
Elektrotehnički fakultet u Osijeku
Kneza Trpimira 2B, 31000 Osijek, Croatia
Tel.: +385 (0)31 224 600; Fax: +385 (0)31 224 605
e-mail: dominika.crnjac@etfos.hr

Mr. sc. Martina Crnjac
Agrokor d.d. – PIK Vrbovec
Mob: 00385 (0)98 984-2430
e-mail: crnjac.martina@gmail.com

Sažetak

Klijenti dolaze slučajno i budu usluženi odmah ako u sustavu postoji slobodno mjesto za usluživanje, a staju u red ako su sva mjesta zauzeta. Nakon usluživanja odlaze iz sustava.
Postoje mnogi sustavi usluživanja u zavisnosti od:

- procesa koji opisuje dolazak
- mehanizama servisiranja
- dužine reda;
  a) 0- sustav s otkazom
  b) k- sustav s konačnim redom čekanja
  c) ∞- sustav s beskonačnim redom čekanja

U radu ćemo detaljno opisati sustav s jednim mjestom za usluživanje, pri čemu je trebovanje Poissonov proces uz pretpostavku da dužina usluživanja na mjestu za usluživanje ima eksponencijalnu raspodjelu.

Ključne riječi: masovno usluživanje, sustavi usluživanja, Poissonov proces, eksponencijalna raspodjela

Summary

Clients are coming randomly and are served immediately if there is a free serving station in the system, and if all the stations are occupied, they enter the queue. After being served they leave the system.
There are many serving systems depending on:

- the process which describes arrival;
- serving mechanisms;
- length of queue;
    a) 0 - system with cancellation,
    b) k – system with a finite queue,
    c) ∞ - system with an infinite queue.

This paper will describe in detail a system with one serving station, where the requisition flow is a Poisson process under the assumption that serving time at a serving station has exponential distribution.

Key words: mass serving, systems of serving, Poisson process, exponential distribution

1. UVOD

Pretpostavimo da je trebovanje Poissonov proces. Bitne su činjenice:

- Slučajni proces[1] $Y_{\Delta t}$ koji predstavlja broj trebovanja (broj novih klijenata) u intervalu $(t, t+\Delta t)$, $t \geq 0,\ \Delta t \geq 0$, ima Poissonovu razdiobu[2] $(P(\lambda \Delta t))$, tj.

$$P(Y_{\Delta t} = k) = \frac{(\lambda \Delta t)^k}{k!} e^{-\lambda \Delta t},\ k \in \{0,1,2,...\}.$$

- Iz *aneksa A* se može vidjeti da je

$$P(Y_{\Delta t} = 0) \approx 1 - \lambda \Delta t,$$

$$P(Y_{\Delta t} = 1) \approx \lambda \Delta t,$$

$$P(Y_{\Delta t} = k) = o(\Delta t) \approx 0,\ k \in \{2,3,...\},$$

što znači da tijekom kratkog vremenskog intervala vrlo vjerojatno neće biti nijednog novog trebovanja, jedno trebovanje će se dogoditi sa malom vjerojatnošću, a više od

[1] N. Sarapa (1986.): Teorija vjerojatnosti, Školska knjiga, Zagreb, str. 284
[2] I. Pavlić (1970.): Statistička teorija i primjena, Tehnička knjiga, Zagreb, str. 79

jednoga će se dogoditi sa zanemarivo malom vjerojatnošću u odnosu na prethodna dva slučaja.

- Vrijeme između dva uzastopna dolaska dva uzastopna klijenta (dva uzastopna trebovanja) ima eksponencijalnu razdiobu $\varepsilon(\lambda)$, što se vidi u *aneksu B*. Dakle, λ^{-1} je jednako očekivanoj (srednjoj) vrijednosti vremena između dolaska dva uzastopna klijenta (dva uzastopna trebovanja), pri čemu je λ očekivana (srednja) brzina pristizanja trebovanja, tj. očekivani (srednji) broj novih trebovanja u jedinici vremena.

Pretpostavimo da dužina usluživanja T na mjestu za uslužvanje ima eksponencijalnu[3] razdiobu $\varepsilon(\lambda)$. Za daljnju razradu postupka su bitne činjenice:

- Ako usluživanje nije završeno do momenta t, vjerojatnost da će biti završeno do momenta $t+\Delta t$ računamo ovako:

$$P\left(T \le t+\Delta t \middle| T > t\right) = \frac{P\left(t < T \le t+\Delta t\right)}{P\left(T > t\right)} = \frac{e^{-\mu t} - e^{-\mu(t+\Delta t)}}{1-\left(1-e^{-\mu t}\right)} = 1-e^{-\mu\Delta t} \approx \mu\Delta t,$$

- Ako usluživanje nije završeno do momenta t, vjerojatnost da neće biti završeno do momenta $t+\Delta t$ računamo ovako:

$$P\left(T > t+\Delta t \middle| T > t\right) = \frac{P\left(T > t+\Delta t, T > t\right)}{P\left(T > t\right)} = \frac{1-\left(1-e^{-\mu(t+\Delta t)}\right)}{1-\left(1-e^{-\mu t}\right)} = e^{-\mu\Delta t} \approx 1-\mu\Delta t.$$

- S obzirom da slučajna varijabla koja predstavlja vrijeme usluživanja ima eksponencijalnu razdiobu $\varepsilon(\lambda)$, očekivana (srednja) vrijednost usluživanja je jednaka

[3] P. Embrechts, E.Klűppelberg, T.Mikosch (1988.): Modeling Ekstremal Events, Springer-Verlog Berlin, Heidelberg, New York, str. 155

μ^{-1}, pri čemu je parametar μ jednak očekivanoj (srednjoj) brzini usluživanja na jednom mjestu za usluživanje, tj. očekivanom (srednjem) broju usluženih klijenata na jednom mjestu za usluživanje u jedinici vremena.

2. SUSTAV USLUŽIVANJA

Neka je $X_t,\ t\in[0,\infty)$ slučajni proces čija je vrijednost u momentu t jednaka broju trebovanja (klijenata) u sustavu (tj., zbroju trebovanja ili klijenata u redu čekanja i na mjestu za usluživanje). To znači da je skup stanja sustava X_t skup $S=\{0,1,2,...\}$.

Prema prethodno objašnjenom možemo izvesti vjerojatnost prijelaza $p_{ij}(\Delta t)$.

$$p_{00}(\Delta t)=P\left(X_{t+\Delta t}=0\,\middle|\,X_t=0\right)\approx 1-\lambda\Delta t.$$

Ako je $i\in\{1,2,...\}$, tada

$$p_{i,i-1}(\Delta t)=P\left(X_{t+\Delta t}=i-1\,\middle|\,X_t=i\right)\approx \mu\Delta t(1-\lambda\Delta t)\approx\mu\Delta t.$$

$$p_{i,i}(\Delta t)=P\left(X_{t+\Delta t}=i\,\middle|\,X_t=i\right)\approx(1-\mu\Delta t)(1-\lambda\Delta t)+\mu\lambda\Delta t^2\approx 1-(\lambda+\mu)\Delta t.$$

Ako je $i\in\{0,1,2,...\}$, tada

$$p_{i,i+1}(\Delta t)=P\left(X_{t+\Delta t}=i+1\,\middle|\,X_t=i\right)\approx(1-\mu\Delta t)\lambda\Delta t\approx\lambda\Delta t,$$

a ako je $i,j\in\{0,1,...\},\ |i-j|>1,$ tada

$$p_{i,j}(\Delta t)=P\left(X_{t+\Delta t}=j\,\middle|\,X_t=i\right)\approx o(\Delta t)\approx 0.$$

Kako je

$$\begin{aligned}
&p_{00}(\Delta t)\approx 1-\lambda\Delta t,\\
&p_{ii}(\Delta t)\approx 1-(\lambda+\mu)\Delta t,\quad i\in\{1,2,...\},\\
&p_{i,i+1}(\Delta t)\approx\lambda\Delta t,\quad i\in\{0,1,...\},\\
&p_{i,i-1}(\Delta t)\approx\mu\Delta t,\quad i\in\{1,2,...\},\\
&p_{i,j}(\Delta t)\approx o(\Delta t),\quad i,j\in\{0,1,2,...\},\ |i-j|>1,
\end{aligned}$$

nije teško pokazati da vrijedi:

Za svako $i \in \{1,2,...,m\}$, $i \neq j$, za male $\Delta t > 0$, (kad $\Delta t \to 0$), vrijedi

$$p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}\Delta t, \qquad p_{ii}(\Delta t) \approx \lambda_{ii}\Delta t + 1.$$

Dokaz:

$$\lambda_{ij} \approx \frac{p_{ij}(\Delta t) - p_{ij}(0)}{\Delta t} = \begin{cases} \dfrac{p_{ij}(\Delta t)}{\Delta t}, & i \neq j \\ \dfrac{p_{ii}(\Delta t) - 1}{\Delta t}, & i = j \end{cases},$$

odakle je za
$$\begin{aligned} &i \neq j, \ p_{ij}(\Delta t) \approx \lambda_{ij}\Delta t, \\ &i = j, \ p_{ii}(\Delta t) \approx \lambda_{ii}\Delta t + 1. \end{aligned}$$

Iz dokazanoga dobijemo matricu Λ

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & \ldots \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & \ldots \\ 0 & \mu & -\lambda-\mu & \lambda & \ldots \\ 0 & 0 & \mu & -\lambda-\mu & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \end{bmatrix}.$$

Vidimo da ovaj proces predstavlja proces rađanja i umiranja[4], gdje je $\lambda_n = \lambda,\ \mu_n = \mu,\ n \in \{0,1,...\}$.

Dobivamo da je egzistencija konačnih vjerojatnosti p^* uvjetovana konvergencijom geometrijskog reda

$$1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{\mu^2} + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k.$$

Ako je $\dfrac{\lambda}{\mu} < 1$ (tj. ako je $\lambda < \mu$, što znači da je brzina pristizanja trebovanja manja nego brzina usluživanja), tada je suma reda jednaka $\dfrac{\mu}{\mu - \lambda}$, te je

[4] Ž. Pauše (1978.): Vjerojatnost, informacija, stohastički procesi, Školska knjiga, Zagreb, str. 176.

$$p_0^* = 1 - \frac{\lambda}{\mu},\ p_k^* = \frac{\lambda^k}{\mu^k}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right),\ k \in \{1, 2, ...\}.$$

To znači da ako sustav dugo radi, vjerojatnost da je sustav besposlen je jednaka $p_0^* = 1 - \frac{\lambda}{\mu}$, a da će biti $k-1$ klijenata u redu čekanja plus jedan na mjestu za usluživanje $p_k^* = \frac{\lambda^k}{\mu^k}\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right),\ k \in \{1, 2, ...\}$.

U koliko sustav za usluživanje ima k mjesta za usluživanje, a svi ostali uvjeti su isti kao u prethodno opisanom sustavu, tada takav sustav skraćeno označavamo s $M|M|k|\infty$ i matrica Λ ima oblik

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... \\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & ... \\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & ... & 0 & 0 & 0 & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & k\mu & -\lambda-k\mu & \lambda & ... \\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & k\mu & \lambda-k\mu & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \end{bmatrix},$$

što pokazuje da se i u ovom slučaju radi o sustavu rađanja i umiranja, gdje je

$\lambda_n = \lambda,\ n \in \{0, 1, ...\}$,

$\mu_n = n\mu,\ n \in \{1, 2, ..., k\}$, pa zaključujemo da postojanje konačnih

$\mu_n = k\mu,\ n \in \{k+1, k+2, ...\}$,

vjerojatnosti zavisi od konvergencije reda

$1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{1}{2!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + ... + \frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^i$ (red konvergira samo ako je $\frac{\lambda}{k\mu} < 1$).

Ako red konvergira, onda se radi o geometrijskom redu

$$A=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i}+\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}\frac{\mu}{(k\mu-\lambda)k!}.$$

Lako izračunavamo konačne vjerojatnosti

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\frac{1}{An!},\ n\in\{0,1,...,k\},\qquad (1)$$

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\frac{1}{An!k^{n-k}},\ n\in\{k+1,k+2,...\}.\qquad (2)$$

Ako sustav za usluživanje ima k mjesta za usluživanje i n mjesta u redu čekanja, a svi ostali uvjeti su isti kao u prethodno opisanim sustavima, tada takav sustav skraćeno označavamo s $M|M|k|r.$ Matrica Λ je formata $k+r+1$ i ima oblik

$$\Lambda=\begin{bmatrix}-\lambda & \lambda & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0\\ \mu & -\lambda-\mu & \lambda & 0 & ... & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2\mu & -\lambda-2\mu & \lambda & ... & 0 & 0 & 0\\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ...\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & k\mu & -\lambda-k\mu & \lambda\\ 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & k\mu & -k\mu\end{bmatrix},$$

što pokazuje da se i u ovom slučaju radi o sustavu rađanja i umiranja, gdje je

$$\lambda_n=\lambda,\ n\in\{0,1,...,k+r\},$$
$$\mu_n=n\mu,\ n\in\{1,2,...,k\},$$
$$\mu_n=k\mu,\ n\in\{k+1,k+2,...,k+r\}.$$

Konačne vjerojatnosti uvijek postoje i dobivamo

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\frac{1}{Bn!},\ n\in\{0,1,...,k\},$$

$$p_n=\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{n}\frac{1}{Bk!k^{n-k}},\ n\in\{k+1,k+2,...,k+r\},$$

gdje je $$B=\sum_{i=0}^{k}\frac{1}{i!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{i}+\frac{1}{k!}\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k}\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{\lambda}{k\mu}\right)^{i}.$$

Primjer 2.1. U znanstvenu ustanovu koja ima samo jednog profesora matematike prosječno
dolazi jedan student svakoga sata (na ispit ili konzultacije)

a) Koliko se vremena prosječno smije profesor baviti jednim studentom ako želi
da vjerojatnost da u redu čeka više od 4 studenta bude manja od 0.05 ?
b) Koliko je u tom slučaju očekivano vrijeme koje će profesor provesti bez
studenata tijekom radnog vremena koje traje 8 sati?
c) Koliki je očekivani broj studenata koji čekaju profesora za ispit ili konzultacije?

Rješenje : Radi se o sustavu $M|M|1|\infty$, gdje je $\lambda=1$,a μ je nepoznato.

Tada je $$\Lambda=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0 & 0 & \dots\\ \mu & -1-\mu & 1 & 0 & \dots\\ 0 & \mu & -1-\mu & 1 & \dots\\ 0 & 0 & \mu & -1-\mu & \dots\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \end{bmatrix},$$

$$p_0^*=1-\frac{1}{\mu},\ p_k^*=\frac{1^k}{\mu^k}\left(1-\frac{1}{\mu}\right),\ k\in\{1,2,\dots\}.$$

a) Podsjetimo se da p_k^* predstavlja vjerojatnost da u sustavu (u kabinetu profesora i u
hodniku ispred njega) ima k studenata.
Iz
uvjeta

$$\sum_{k=5}^{\infty}p_k^*<0.05\Rightarrow\sum_{k=5}^{\infty}\frac{1}{\mu^k}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)<0.05\Rightarrow\frac{1}{\mu^6}\left(1-\frac{1}{\mu}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\mu}\right)^k<0.05$$

dobivamo da je $\mu \approx 1.64$ i tada je prosječna dužina usluživanja jednaka $\frac{1}{\mu} \approx 0.61$ sata.

b) Tijekom radnog vremena od 8 sati profesor će prosječno provesti $8 \cdot p_0^* = 8 \cdot (1 - 0.61) = 3.12$ sati bez rada sa studentima.

c) Studenati koji čekaju profesora za ispit ili konzultacije su studenti koji su u hodniku i
i studenti u kabinetu.
S obzirom da je broj studenata koji čekaju profesora jednak

$$\sum_{k=0}^{\infty} k p_k^* = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{1}{\mu^k}\left(1 - \frac{1}{\mu}\right) \approx 1.55 .$$

Primjer 2.2. U jednoj tvornici postoji veliki broj istih uređaja koje održavaju tri radnika.
Primjećeno je da se uređaji kvare prosječnom brzinom dva uređaja na sat.
Radnik popravi uređaj za prosječno jedan sat rada. Uz pretpostavku da se radi o
$M|M|3|\infty$ sustavu usluživanja treba naći vjeroatnost da

a) su svi radnici slobodni,
b) su svi radnici zaposleni,
c) na popravak čeka više od jednog uređaja.

Rješenje : Imamo odgovarajuću matricu Λ

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 1 & -3 & 2 & 0 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 2 & -4 & 2 & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -5 & 2 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

i sustav jednadžbi

$$
\begin{array}{llllll}
-2p_0^* & +p_1^* & & & & = 0 \\
2p_0^* & -3p_1^* & +2p_2^* & & & = 0 \\
 & 2p_1^* & -4p_2^* & +3p_3^* & & = 0 \\
 & & 2p_2^* & -5p_3^* & +3p_4^* & = 0 \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
p_0^* & +p_1^* & +p_2^* & +\ldots & & = 1.
\end{array}
$$

Iz (1) i (2) dobivamo A=9, te je

a) $p_0^* = \dfrac{1}{9}$

b) $1 - p_0^* - p_1^* - p_2^* = 1 - \dfrac{1}{9} - \dfrac{2}{9} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{4}{9}$

c) $1 - p_0^* - p_1^* - p_2^* - p_3^* - p_4^* = \dfrac{16}{81}$.

Aneks A

Poissonov proces (parametar $\lambda > 0$)

$X_t, t \in [0, \infty)$ je slučajni proces sa vrijednostima u skupu $S = \{0,1,2,\ldots\}, X_0 = 0, X_t$ ima stacionarne nezavisne priraštaje i za svako $s,t > 0$

$$P(X_{s+t} - X_s = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}, k = 0,1,2,\ldots \qquad (3)$$

Posljednji uvjet znači da za svako $s,t \in [0,\infty)$, slučajna varijabla $X_{s+t} - X_s$ ima Poissonovu razdiobu $P(\lambda t)$.

Matematičko očekivanje $E(X_t)$ je jednako λt. Zaista, $E(X_t) = E(X_t - X_0)$, te kako slučajna varijabla $X_t - X_0$ ima Poissonovu razdiobu $P(\lambda t)$, njeno očekivanje je λt.

Disperzija za X_t je $D(X_t) = \lambda t$.

Korelacionu funkciju $R(t,s)$ nalazimo za $s>t>0$

$$R(t,s)=E(X_tX_s)=E\left(X_t\left(X_t+\left(X_s-X_t\right)\right)\right)=E\left(X_t^2\right)+E(X_t)E(X_s-X_t)=$$
$$=\lambda^2t^2+\lambda t+\lambda t\lambda(s-t)=\lambda t+\lambda^2ts=\lambda\min\{s,t\}+\lambda^2ts,$$

dok je kovarijansna funkcija $K(s,t)=\lambda\min\{s,t\}$.
Bitna osobina ovog procesa je da, ako $\Delta t\to 0$, tada

$$\begin{aligned}&P\left(X_{t+\Delta t}-X_t=0\right)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t),\\&P\left(X_{t+\Delta t}-X_t=1\right)=\lambda\Delta t+o(\Delta t),\\&P\left(X_{t+\Delta t}-X_t=k\right)=o(\Delta t),\ \text{za sve } k\geq 2,\end{aligned}\tag{4}$$

gdje $o(\Delta t)$ predstavlja beskonačno malu veličinu u odnosu na Δt (tj. $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{o(\Delta t)}{\Delta t}=0$).
Značenje ove navedene osobine bi se moglo objasniti na slijedeći način : Ako je proces X_t broj kupaca (broj nekih događaja) koji uđu u trgovinu u intervalu $[0,t]$, onda je $X_{t+\Delta t}-X_t$ broj novih kupaca (broj događaja) u intervalu $[t,t+\Delta t]$. Osobina (3) znači da ako dužina intervala Δt teži ka 0, onda je vjerojatnost da će biti više od jednog kupca (događaja) beskonačno mala veličina u odnosu na Δt. Također, vjerojatnost da će se realizirati jedan događaj je beskonačno mala veličina istog reda kao Δt, dok je vjerojatnost da novih kupaca (novih događaja) neće biti veličina bliska $1-\lambda\Delta t$.

Prethodno opisane relacije slijede iz prirode procesa.
U koliko primjenimo razvoj u Maklorenov red[5] funkcije $e^{-\lambda\Delta t}$,

$$e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+\frac{(\lambda\Delta t)^2}{2!}-\frac{(\lambda\Delta t)^3}{3!}...=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t),$$

dobivamo

[5] D.S. Mitrinović, (1977.), Kompleksna analiza, Građevinska knjiga, Beograd, str. 182

$$P\left(X_{t+\Delta t}-X_t=0\right)=\frac{\left(\lambda\Delta t\right)^0}{0!}e^{-\lambda\Delta t}=1-\lambda\Delta t+o\left(\Delta t\right),$$

$$P\left(X_{t+\Delta t}-X_t=1\right)=\frac{\left(\lambda\Delta t\right)^1}{1!}e^{-\lambda\Delta t}=\lambda\Delta t\left(1-\lambda\Delta t+o\left(\Delta t\right)\right)=\lambda\Delta t+o\left(\Delta t\right),$$

$$P\left(X_{t+\Delta t}-X_t=n\right)=\frac{\left(\lambda\Delta t\right)^n}{n!}e^{-\lambda\Delta t}=\left(\lambda\Delta t\right)^n\left(1-\lambda\Delta t+o\left(\Delta t\right)\right)=o\left(\Delta t\right),\ \text{za sve n} \geq 2.$$

Osobina (3) je ekvivalentna osobini (4). Ako promatramo interval $(s, s+t)$ dužine t lako je pokazati da ako je zadovoljen uvjet (4) za proces X_t sa stacionarnim nezavisnim priraštajima i ako je $X_0=0$, onda je $P\left(X_{s+t}-X_s=k\right)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,2,...,$ tj. X_t je Poissonov proces.

Podjelimo li interval $(s, s+t)$ na n jednakih dijelova i ako je $\Delta t=\frac{t}{n}$, kada n raste Δt postaje jako malo, te možemo primjeniti osobinu (4) koja isključuje mogućnost da se u malom intervalu Δt realizira više od jednog događaja.

To znači da u svakom dijelu dužine Δt može biti 1 ili 0 realizacija događaja.

Vjerojatnost da će u cijelom intervalu dužine $t=n\Delta t$ biti k realizacija događaja je jednaka

$$P\left(X_{s+t}-X_s=k\right)=\binom{n}{k}\left(\lambda\Delta t\right)^k\left(1-\lambda\Delta t\right)^{n-k}=\binom{n}{k}\left(\frac{\lambda t}{n}\right)^k\left(1-\frac{\lambda t}{n}\right)^{n-k}.$$

Ovaj izraz se jednostavno transformira u

$$P\left(X_{s+t}-X_s=k\right)=\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t},\ k=0,1,2,...,$$

Aneks B

Neka je X_t Poissonov proces i neka slučajna varijabla T_n predstavlja dužinu intervala između realzaciju $(n-1)$-tog i n-tog događaja (ako se radi o procesu koji predstavlja broj kupaca koji su ušli u trgovinu, onda je T_n vrijeme koje protekne između ulaska $(n-1)$-tog i n-tog kupca). Možemo pokazati da T_n ima eksponencijalnu razdiobu $\varepsilon(\lambda)$ na slijedeći način :

$F_{T_1}(t)=P(T_1<t)=1-P(t_1\geq t)$. Događaj $T_1\geq t$ znači da se prvi događaj nije realizirao do trenutka t, tj. Da je $X_t=0$. Kako je

$$P(X_t=0)=P(X_t-X_0=0)=\frac{(\lambda t)^0}{0!}e^{-\lambda t},$$

onda je $F_{T_1}(t)=1-e^{-\lambda t},\ t>0,$ što znači da T_1 ima $\varepsilon(\lambda)$ raspodjelu. Ako je $n>1$, tada je

$$F_{T_1}(t)=P(T_n<t)=1-P(T_n\geq t)=1-\int_0^\infty P(T_n\geq t|T_{n-1}=s)\varphi_{T_{n-1}}(s)\,ds=$$

$$=1-e^{-\lambda t}\int_0^\infty \varphi_{T_{n-1}}(s)ds=1-e^{-\lambda t},\ t>0,$$

što znači da T_1 ima $\varepsilon(\lambda)$ raspodjelu za sve $n\in\mathbb{N}$.

3. ZAKLJUČAK

Postoje različiti praktični procesi usluživanja kupaca u trgovinama.U pitanju je sustav u kojem se obavljaju određene usluge i u koji dolaze potrošači usluga, općenito u slučajnim « vremenskim razmacima «. Ako u sustavu postoji slobodno mjesto za obavljanje usluge, potrošač koji je upravo stigao odmah se počinje usluživati. Kad su sva mjesta zauzeta, stvara se red (rep) u kojem se čeka da se oslobodi mjesto za slijedeće usluživanje.Vrijeme usluživanja pojedinog potrošača je slučajna varijabla.U radu su riješeni problemi koji imaju veliko praktično značenje i daju odgovore na pitanja u vezi s usluživanjem.

LITERATURA

1. Embrechts, P. ; Klűppelberg, E. ; Mikosch, T. (1988.): *Modeling Ekstremal Events*, Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York

2. Kmenta, J. (1997.): *Počela ekonometrije*, Mate, Zagreb

3. Mitrinović, D.S. (1977.): *Kompleksna analiza*, Građevinska knjiga, Beograd

4. Pauše, Ž. (1978.): *Vjerojatnost, informacija, stohastički procesi*, Školska knjiga, Zagreb

5. Pavlić, I. (1970.): *Statistička teorija i primjena*, Tehnička knjiga, Zagreb

6. Sarapa, N. (1986.): *Teorija vjerojatnosti*, Školska knjiga, Zagreb